

ΘΕΜΑ Α

A1.α) Θεωρία σχολικό σελ.15

β) Θεωρία σχολικό σελ. 35-36

A2. Θεωρία σχολικό σελ. 142

A3. Θεωρία σχολικό σελ. 135

A4. α) Λάθος , αιτιολόγηση σχολικό βιβλίο σελ.134

β) Λάθος , αιτιολόγηση σχολικό βιβλίο σελ.71

A5. γ

ΘΕΜΑ Β

B1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} + \lambda) = 2 \Leftrightarrow 0 + \lambda = 2 \Leftrightarrow \lambda = 2$

B2. Έστω $g(x) = f(x) - x, x \in [2, 3]$

- Η g συνεχής στο $[2, 3]$
- $\left. \begin{array}{l} g(2) = \frac{1}{e^2} \\ g(3) = \frac{1}{e^3} - 1 \end{array} \right\} g(2)g(3) < 0$ Από Θεώρημα Bolzano η εξίσωση

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \text{ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο } (2, 3)$$

$g'(x) = f'(x) - 1 = -e^{-x} - 1 < 0$ Η g γνησίως φθίνουσα στο $[2, 3]$, οπότε η εξίσωση έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(2, 3)$

B3. $f'(x) = -e^{-x} < 0$

Η f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Οπότε και 1-1

$$f^{-1}: f(A) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = y$$

$$e^{-x} + 2 = y$$

$$e^{-x} = y - 2, y - 2 > 0 \Leftrightarrow y > 2$$

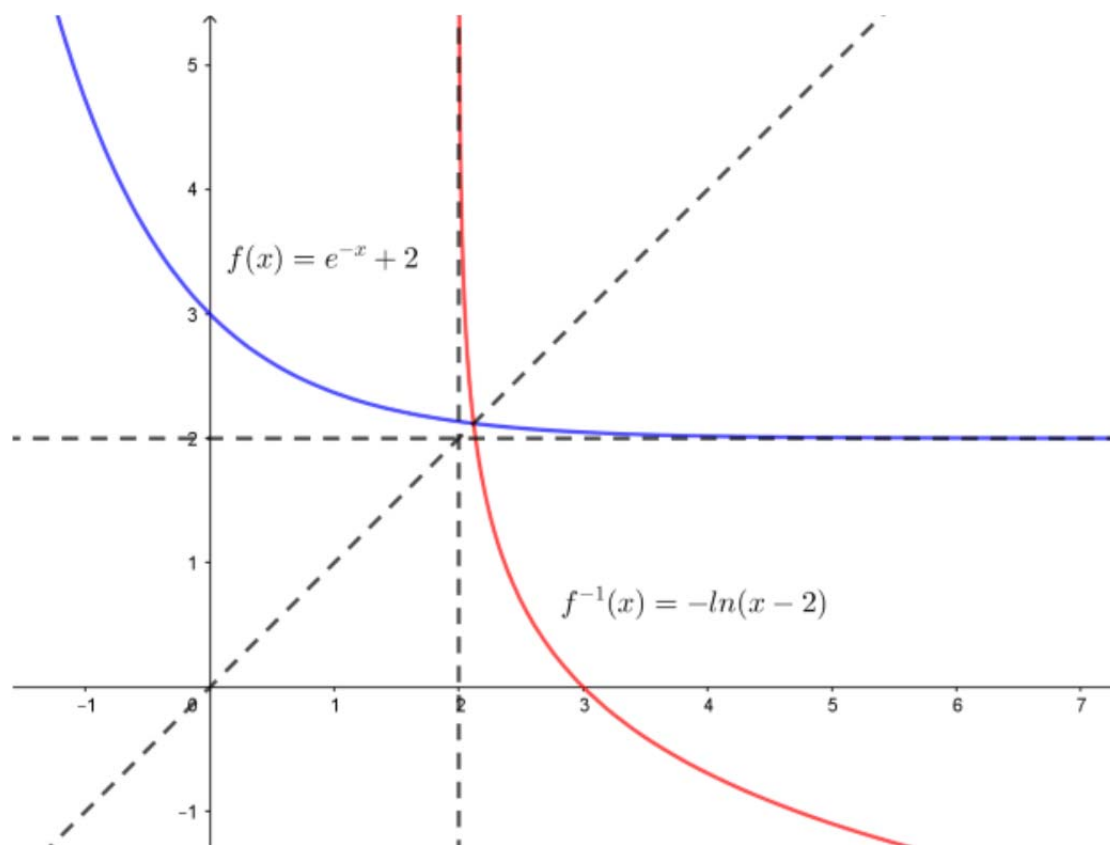
$$-x = \ln(y - 2), y - 2 > 0 \Leftrightarrow y > 2$$

$$x = -\ln(y - 2), y - 2 > 0 \Leftrightarrow y > 2$$

$$f^{-1}(x) = -\ln(x - 2), A_{f^{-1}} = (2, +\infty)$$

$$\mathbf{B4.} \lim_{x \rightarrow 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} [-\ln(x - 2)] \stackrel{u=x-2}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow 0^+}} (-\ln u) = +\infty$$

Η $x = 2$ κατακόρυφη ασύμπτωτη.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f συνεχής στο 1: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$

$$1 + \alpha = 1 + \beta = 1 + \alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + a - a + -1}{x - 1} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{e^{x-1} + \beta x - 1 - \beta}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{e^{x-1} - 1}{x - 1} + \frac{\beta(x - 1)}{x - 1} \right] = 1 + \beta$$

Η f παραγωγίσιμη στο 1: $2 = 1 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$ και $\alpha = 1$.

Γ2. Για $x \in [1, +\infty)$: $f'(x) = 2x > 0$

$$x \in (-\infty, 1): f'(x) = e^{x-1} + 1 > 0$$

Η $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα

$$f(\mathbb{R}) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

Γ3. i) Στο $\Delta = (-\infty, 0)$ η συνεχής και $\uparrow$ στο Δ .

$$f(\Delta) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)) = (-\infty, \frac{1}{e} + 1)$$

$0 \in f(\Delta)$ οπότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική λύση στο Δ . (αρνητική)

$$f^2(x) - x_0 f(x) = 0$$

$$\text{ii) } f(x)(f(x) - x_0) = 0$$

$$f(x) = 0 \text{ ή } f(x) = x_0$$

$$f(x) = f(x_0)$$

Έστω $\rho > x_0$ και $f(\rho) = x_0$

$$f \not\geq f(\rho) > f(x_0)$$

$x_0 > 0$ άτοπο αφού $x_0 < 0$

$f-1-1 \chi = \chi_0 < 0$ αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$

$$y = x^2 + 1, x \geq 1$$

$$M(x(+), y(+)) = (x(+), x^2(+) + 1)$$

$$\mathbf{\Gamma 4.} \quad E(+) = \frac{x(+) \cdot (x^2(+) + 1)}{2} = \frac{x^3(+) + x(+)}{2}$$

$$E'(+) = \frac{1}{2}(3x^2(+)x'(+) + x'(+))$$

$$E'(0) = \dots\dots\dots = 28 \text{ τετραγ. μον. ανά δευτερόλεπτο}$$

ΘΕΜΑ Δ

$$\mathbf{\Delta 1.} \quad \begin{cases} f'(1) = -1 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

$$E(\Omega) = \int_0^2 |f(x) - (x-2)| dx = \int_0^2 |(x-1) \ln(x^2 - 2x + 2)| dx =$$

$$\mathbf{\Delta 2.} \quad \int_0^2 |(x-1) \ln[(x-1)^2 + 1]| dx$$

$$(x-1) \ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0$$

Οπότε $E(\Omega) = \int_0^2 (x-1) \ln[(x-1)^2 + 1] dx \stackrel{u=(x-1)^2+1}{=} \dots\dots\dots = \int_1^2 \frac{1}{2} \ln u du = \ln 2 - \frac{1}{2} \tau. \mu.$

$$f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow \ln[(x-1)^2 + 1] + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$$

$\Delta 3. \text{ i)}$

$$\ln[(x-1)^2 + 1] + 2x \frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0$$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$(x-1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 \geq 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \ln[(x-1)^2 + 1] \geq 0 \\ \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} \geq 0 \end{array} \right\} \quad \text{προσθέτουμε κατά μέλη } f(x) \geq 0$$

$$f(\lambda+1) \geq (\lambda-1) \ln(\lambda^2 - 2\lambda + 2) - \lambda + 2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow f(\lambda+1) \geq f(\lambda) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

ii)

$$f(\lambda+1) - f(\lambda)^2 \geq -\frac{1}{2}$$

$f / \left[\lambda, \lambda + \frac{1}{2} \right]$ ισχύουν οι υποθέσεις ΘΜΤ

Υπάρχει τουλάχιστον $\xi \in (\lambda, \lambda + \frac{1}{2}) : f'(\xi) = \frac{f(\lambda + \frac{1}{2}) - f(\lambda)}{\frac{1}{2}}$

Όμως $f'(\xi) \geq -1 \Leftrightarrow f(\lambda + \frac{1}{2}) - f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$

Δ4. Έστω $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ τα σημεία επαφής της κοινής εφαπτομένης με την C_f και C_g αντίστοιχα. Τότε οι εξισώσεις εφαπτομένων σε αυτά είναι :

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha) \Leftrightarrow y = f'(\alpha)x + f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) \quad \text{και}$$

$$y - g(\beta) = g'(\beta)(x - \beta) \Leftrightarrow y = g'(\beta)x + g(\beta) - \beta g'(\beta)$$

Αυτές πρέπει να ταυτίζονται άρα:

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) & (1) \\ f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = g(\beta) - \beta g'(\beta) & (2) \end{cases}$$

Έχουμε $f'(\alpha) \geq -1$ με ισότητα για $\alpha = 1$.

Επίσης $g(x) = -3x^2 - 1$ και φανερά ισχύει $g'(x) \leq -1$ με ισότητα για $x = 0$.

Άρα για να ισχύσει η (1) πρέπει $f'(\alpha) = g'(\beta) = -1$ δηλαδή $\alpha = 1$ και $\beta = 2$ λύσεις που θα επαληθευτούν και τη σχέση (2). Άρα οι C_f, C_g έχουν μία μόνο κοινή εφαπτομένη η οποία εφάπτεται της C_f στο $(1, f(1))$ και της C_g στο σημείο $(0, g(0))$

Η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης είναι

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$$