

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΗΣ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. α) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) εκτός ίσως από ένα σημείο x_0 στο οποίο είναι συνεχής. Να δείξετε ότι: αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Μόρια 5

β) Να διατυπώσετε τον ορισμό του τοπικού ελάχιστου μιας συνάρτησης f .

Μόρια 4

B. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (**Σ**) ή λάθος (**Λ**).

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι '1-1' σε ένα διάστημα Δ , τότε δεν γνησίως μονότονη στο Δ .

β) Αν f συνεχής στο $[-2, 2]$ με $\int_{-2}^2 (f(x) - e^x)^2 dx = 0$ τότε $f(x) = e^x, x \in [-2, 2]$

γ) Αν f συνεχής στο $[a, \beta]$ με $\int_a^\beta f(x) dx > 0$ τότε υπάρχει $x_0 \in [a, \beta]: f(x_0) > 0$

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός ανοικτού διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι ανοικτό διάστημα.

ε) Αν οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και η $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στα πεδία ορισμού τους, τότε η $g \circ f$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

ζ) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και δεν μηδενίζεται σ' αυτό τότε $f(a)f(\beta) > 0$

η) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$

θ) Αν μια συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή σ' ένα διάστημα Δ τότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$.

Μόρια 16

ΘΕΜΑ 2^ο

Έστω $x \in \mathbb{R}$ και ο μιγαδικός $z = x + \frac{i}{x+i}$. Να δείξετε ότι :

A. $\text{Im}(z) \leq \frac{1}{2}$

Μόρια 6

B. Υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ ώστε ο z να είναι φανταστικός. **Μόρια 6**

Γ. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\text{Im}(z) \cdot \eta\mu x)$

Μόρια 6

Δ. Αν $R \in (z) = \text{Im}(z)$ να βρείτε το θετικό ακέραιο n ώστε $z^n = \frac{i}{2^9}$ **Μόρια 7**

ΘΕΜΑ 3^ο

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f(x) > 0$ και $f'(x) + \ln f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι η f είναι ↗

Μόρια 6

B. Να δείξετε ότι οι εξισώσεις $x + \ln x = 1$ και $f(x) = x$ έχουν μοναδική ρίζα το 1

Μόρια 6

Γ. Να δείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και κυρτή

Μόρια 6

Δ. Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x) dx = -\frac{f^2(0) + 2f(0) - 3}{2}$

Μόρια 7

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \int_0^x \left(\int_{-t}^t \frac{u^2 + 1}{e^u + 1} du \right) dt$ με $x \in \mathbb{R}$.

A. Να δείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να βρεθεί η $f''(x)$.

Μόρια 6

B. Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{2}x^2$.

Μόρια 6

Γ. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^{\nu}}$ για τις διάφορες τιμές του $\nu \in \mathbb{N}^*$

Μόρια 7

Δ. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται στη C_f , στους άξονες xx' , yy' και στην ευθεία $x = 1$.

Μόρια 6

Καλή Επιτυχία!

