ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. α) Να διατυπώσετε το Θ.Β και να αποδώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

3 μόρια

β) Να αποδείξετε ότι: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

3 μόρια

γ) Να αποδείξτε ότι: Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0. Το αντίστροφο ισχύει; Δώστε παράδειγμα.

4 μόρια

Β. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό (Σ) ή (Λ) Λάθος.

α) Αν z ένας μιγαδικός αριθμός με $\mathrm{Re}(z) = 2$ τότε $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}$.

β) Αν z_1, z_2 δυο μιγαδικοί αριθμοί με $z_1^2 + z_2^2 = 0$ τότε $z_1 = z_2 = 0$.

γ) Ο αριθμός $z = 1 + i$ μπορεί να είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 - 4z + \lambda^2 = 0$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η g δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε η συνάρτηση $f+g$ δεν είναι συνεχής στο x_0.

ε) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 τότε δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

ζ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο [α,β]. Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ και υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = 0$ τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

η) Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(1)=3$ και $f(2)=4$ τότε υπάρχει $x_0 \in (1,2): f(x_0)=\pi$.

θ) Αν η f είναι συνεχής στο [α,β]=Δ και γνησίως φθίνουσα τότε το σύνολο τιμών $f(\Delta)=\left[\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x), \lim\limits_{x\to a^+} f(x)\right]$

ι) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής και μη σταθερή στο $A=\mathbb{R}^*$ τότε το f(A) είναι οπωσδήποτε διάστημα.

κ) Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$ τότε η C_f διέρχεται από το σημείο A(2,5).

λ) Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $|f(x)-f(y)| \le (x-y)^2$ για κάθε $x,y \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

μ) Αν η συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

ν) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ με $f(2)=1$ και $f'(2)=1$ τότε η εφαπτομένης της C_f στο A(2,1) έχει εξίσωση y=x.

ο) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$

π) Η συνάρτηση $f(x)=x\sqrt{x}$ με π.ο το $[0,+\infty)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

15 μόρια

ΘΕΜΑ 2ο

Α. Αν z,w δυο μιγαδικοί αριθμοί με $|z|=1$ και $w=\dfrac{z+i}{-iz+1}$ να αποδείξετε ότι:

i. $|w|=1$

ii. $\dfrac{z-w}{1-zw} \in R$

12 μόρια

Β. α) Αν $z=3+4i$ και $|w|=1$ με $z,w\in\mathbb{C}$, να βρείτε το w ώστε το $|w+z|$ να έχει ελάχιστη και μέγιστη τιμή.

8 μόρια

β) Αν $z\in\mathbb{C}$ με $|z-2-3i|=2$ να βρείτε την ελάχιστη τιμή της παράστασης $\Pi=|z+1+i|$.

5 μόρια

ΘΕΜΑ 3ο

Α. α) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [0,1] με $-1<f(x)<1$ για κάθε $x\in[0,1]$ δείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ένα τουλάχιστον κοινό σημείο με την ευθεία $y=2x-1$.

8 μόρια

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [0,2].

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in[0,2]$: $f(\xi)=\dfrac{f(0)+5f(1)+4f(2)}{10}$

7 μόρια

Β. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο [-2,2] με $x^2+f^2(x)=4$ για $x\in[-2,2]$.

i. Να βρεθούν οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$

ii. Δείξτε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο (-2,2)

iii. Αν $f(1)=-\sqrt{3}$ να βρεθεί ο τύπος της f

10 μόρια

ΘΕΜΑ 4ο

Α. α) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής με $xf(x)+2=f(x)+\sqrt{x^2+3}$ για κάθε $x\in R$, να βρεθεί ο τύπος της f.

6 μόρια

β) Δίνεται η συνάρτηση $f:R\to R$ με f συνεχή στο 3 και $f(3)\neq 0$.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x)=|x-3|\cdot f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο 3.

6 μόρια

Β. α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 με $f(1)=2$ και $f'(1)=4$ να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2x}{\sqrt{x+3}-2}$

6 μόρια

β) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0)=1$.

Αν $f(x+y)=f(x).(y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι, η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ με $f'(x_0)=f(x_0)$.

7 μόρια

Και…

<u>ΘΕΜΑ 4ο</u>

Α. α) Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής με $xf(x)+2=f(x)+\sqrt{x^2+3}$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, να βρεθεί ο τύπος της f. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίμη στο 1.

10 μόρια

β) β) Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με f συνεχή στο 3 και $f(3)\neq 0$.

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}-(x-3).f(x), x<3\\ (x-3).f(x), \geq 3\end{cases}$ είναι παραγωγίσιμη στο 3.

7 μόρια

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμη στο 1 με $f'(1)=2$ για την οποία ισχύει $f(x+\psi)=f(x)+f(\psi)+2x^2\psi^2$, για κάθε x,ψ $\in\mathbb{R}$.Να αποδείξετε ότι η f είναι παρα- γωγίσιμη σε κάθε $x_0\in\mathbb{R}$.

8 μόρια

<u>ΤΕΛΟΣ</u> (καλή επιτυχία)